



Construction and Control Design of a Rotational Inverted Pendulum Prototype

Vitoriano Medeiros Casas, João Aristeu Seixas Cardoso,
Luiz Antonio Sobrinho de Souza, Eduardo Guimarães Pedrosa
and Rodrigo Farias Araújo

EasyChair preprints are intended for rapid
dissemination of research results and are
integrated with the rest of EasyChair.

October 6, 2024

Construção e Projeto de Controle de um Protótipo de Pêndulo Invertido Rotacional

Vitoriano M. Casas* João A. S. Cardoso* Luiz A. S. Souza*
Eduardo G. Pedrosa* Rodrigo F. Araújo**,*

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, AM, Brasil (e-mails: vitoriano.casas@ufam.edu.br, joao-aristeu.cardoso@ufam.edu.br, luiz.sobrinho@ufam.edu.br, eduardo.filho@ufam.edu.br.)

** Departamento de Engenharia de Controle e Automação, Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, AM, Brasil (e-mail: rfaraujo@uea.edu.br)

Abstract: This article presents the process of building and controlling a rotational inverted pendulum. This non-linear plant is commonly used for control applications and testing new controllers, as well as for teaching purposes. The methodology used in this work involves linearizing the model around the operating point, i.e. upright position, apply discretization and designing a linear controller, in this case, a state feedback controller. The control law is found using Lyapunov stability theory and linear matrix inequalities. The results of the practical implementation are presented and show the effectiveness of the controllers designed for the sampling rates used.

Resumo: Este artigo propõe a construção e projeto do sistema de controle de um pêndulo invertido rotacional. Essa planta não-linear é comumente utilizada para aplicação de novos controladores, além de fins didáticos. A metodologia usada neste trabalho conta com a linearização do modelo em torno do ponto de operação, i.e. posição vertical para cima, discretização e o projeto de controlador por realimentador de estados. Os ganhos do controlador é encontrado utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov e desigualdades matriciais lineares. Os resultados da implementação prática são apresentados e mostram a eficácia dos controladores projetados para diferentes taxas de amostragem utilizadas.

Keywords: Nonlinear Control; Lyapunov Theory; LMI; Inverted Pendulum; Discrete Control.

Palavras-chaves: Controle Não-Linear; Teoria de Lyapunov; LMI; Pêndulo Invertido; Controle Discreto.

1. INTRODUÇÃO

Os pêndulos são sistemas mecânicos amplamente estudados por apresentarem movimento harmônico simples. O movimento oscilatório surge pela força centrípeta em torno de uma região de equilíbrio. Ao se tratar de um pêndulo invertido, o estudo se volta para a estabilidade em torno de uma região de equilíbrio vertical, porém com a força gravitacional sendo contrária a posição do pêndulo. Existem diversos sistemas que agem de forma similar a um pêndulo invertido, o caso mais notório é o lançamento de foguetes, ou ainda em aplicações de robótica, na estabilidade de robôs humanoides e projetos de monociclos.

Os modelos de pêndulos são úteis tanto por razões pedagógicas para pesquisa e representam versões simplificadas de sistemas mecânicos que surgem na robótica e sistemas espaciais. Eles possuem papel importante no fomento da pesquisa da dinâmica e controle não lineares de sistemas (Chaturvedi et al., 2009). Construir uma planta de pêndulo invertido pode se tornar uma tarefa desafiadora dependendo da configuração de estrutura escolhida. Entender como as forças atuam no sistema completo é fundamental

para realização do controle (Cazzolato e Prime, 2011). Este trabalho aborda uma estrutura de pêndulo invertido rotativo (PIR) também conhecido como pêndulo de Furuta.

O PIR foi primeiramente introduzido em Furuta et al. (1991). Vários artigos sobre o controle do pêndulo podem ser encontrados e utilizam diferentes conceitos como, por exemplo, a estabilização em torno da região de equilíbrio instável (Aguilar-Ibañez et al., 2010). Outros também fazem o balanço da posição suspensa para a posição vertical instável (La Hera et al., 2009). Há também quem faça o rastreamento da posição do braço enquanto o pêndulo está na posição vertical para cima (Moreno-Valenzuela et al., 2016). Desses três objetivos principais: balanço de subida, estabilização e rastreamento da trajetória, este trabalho se voltará exclusivamente à estabilização.

A teoria de controle moderna obteve enorme sucesso em áreas onde o sistema é bem definido, ou seja, quando se conhece completamente o modelo dinâmico do sistema. No entanto, por mais que se tenha o modelo matemático do sistema, no caso do PIR, o modelo é não-linear (Prado et al., 2020). Para se utilizar técnicas de controle linear,

foi realizada a linearização do modelo em torno do ponto de operação desejado.

Por outro lado, a implementação prática de sistemas de controle é normalmente feita em sistemas digitais, como microcontroladores ou computadores. Neste caso, o modelo matemático que descreve o sistema deve ser discretizado, de modo que os dispositivos digitais possam ser utilizados. Contudo, alguns outros fatores surgem e podem influenciar o desempenho dos controladores, destaca-se principalmente a taxa de amostragem com a qual as medidas e sinais de controle são atualizados (Aguirre, 2023).

Deste modo, este trabalho volta-se a construção física de uma planta do tipo PIR com a finalidade de aplicação prática de controle. Com o sistema construído pôde-se utilizar a teoria de Lyapunov por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs) para se obter controladores que estabilizaram o sistema. Além disso, o trabalho propõe-se a testar a eficácia dos controladores projetados com diferentes taxas de amostragem, verificar as limitações físicas do hardware utilizado e validar a utilização de um modelo linearizado para controle do sistema não-linear.

2. PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL

A planta construída consiste na configuração conhecida como pêndulo invertido rotacional, ou pêndulo de Furuta, proposto (Furuta et al., 1991) como um tipo de pêndulo alternativo ao *Pendulum on a cart*.

Esse pêndulo foi proposto de forma a auxiliar o aprendizado e aplicação de controle. O PIR consiste em um pêndulo acoplado à um eixo horizontal comumente chamado de braço em uma extremidade. A outra extremidade do braço é acoplado ao eixo rotativo de um motor. Com essa configuração o sistema possui 2 graus de liberdade: o deslocamento angular do braço e o deslocamento angular do pêndulo, além de possuir dinâmica com mais parâmetros não-lineares em comparação ao *Pendulum on a cart*, em que por exemplo a energia cinética do carrinho ser facilmente calculada devido ao movimento ao longo do eixo horizontal.

A Figura 1 mostra o esquema convencional do PIR que é comumente utilizado para se obter o modelo. Em (Cazzolato e Prime, 2011) o esquema de PIR apresentado se refere ao braço horizontal e ao pêndulo como braço 1 e braço 2 respectivamente.

A Figura 2 mostra o protótipo de pêndulo construído. Algumas peças foram desenhadas no software Fusion 360 de modelagem 3D. Um *encoder* rotativo incremental com 360 ppr (pulsos por revolução) foi acoplado ao eixo do motor de passo. A peça que forma os braços está acoplada diretamente ao eixo do *encoder* rotativo, assim quando há rotação no braço 2 o movimento é transferido para o *encoder* incremental.

Para medir a rotação do braço 1, foi necessário utilizar um segundo *encoder* no eixo do motor. O *encoder* magnético AS5600 foi acoplado ao motor na direção do eixo.

Foi utilizado um motor de passo Nema 17 com 200 passos como atuador do sistema. Para realizar a movimentação do motor foi utilizado o *driver* do chip A4988. Dessa forma pode-se aumentar a quantidade de passos por revolução

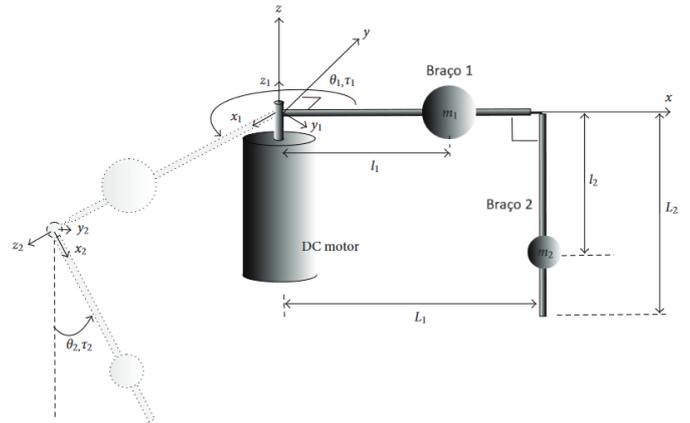


Figura 1. Esquema de um pêndulo invertido rotacional. (Cazzolato e Prime, 2011).

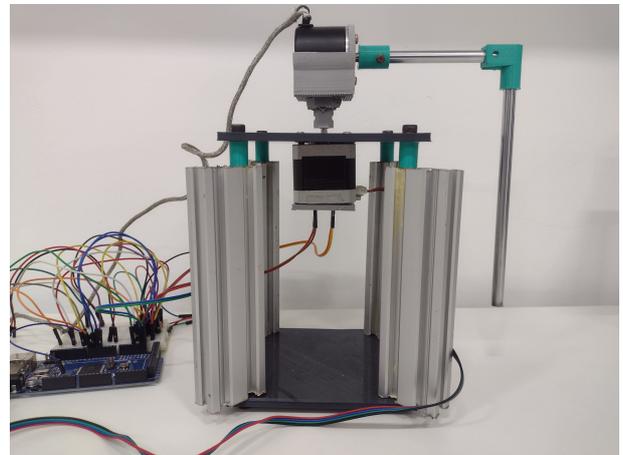


Figura 2. Protótipo do PIR.

acima de 200. Essa técnica é conhecida como micro passos, em que a fase da corrente é controlada em frações ao invés de binário. A tensão de entrada para operação do motor de passo conectado ao chip pode chegar a 35 V e $\pm 2A$. O chip A4988 possui duas pontes-H com transistores FET DMOS para fazer o controle de motores de passo bipolares. Esse chip não pode controlar motores de passo unipolares. O chip permite cinco modos de controle de passo. No último modo pode-se aumentar a quantidade de passos por revolução à 3200 passos.

Para aquisição dos sinais de medição e computação do sinal de controle foi utilizado um arduino Mega 2560 com *clock speed* de 16 MHz e 5V de tensão de operação. Os pinos de sinal das fases A e B do *encoder* incremental foram conectados à dois pinos de interrupção do arduino. O *encoder* AS5600 utiliza o protocolo padrão I2C de comunicação serial. O *driver* A4988 utiliza pinos digitais para alterar o modo de controle de passos, além de pinos digitais específicos de controle: pino de micro passos e pino de direção da rotação.

3. MODELO DINÂMICO

O sistema pêndulo invertido rotacional tem dinâmica bem conhecida em razão de seu amplo uso como aplicação em diversos trabalhos. Em (Cazzolato e Prime, 2011) é feito

um estudo aprofundado das equações que descrevem por completo o comportamento de um PIR. Um dos métodos utilizado nesse estudo é formulação de Lagrange para se encontrar a dinâmica do sistema.

Um modelo dinâmico pode ser obtido a partir do esquema mecânico apresentado na Figura 1. Considerando os braços 1 e 2 como os eixos de coordenadas de um plano cartesiano, os tensores de inércia podem ser definidos como:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix}.$$

A rotação angular do braço 1, θ_1 , é medida no plano horizontal, sendo positivo o sentido anti horário quando vista de cima. A rotação angular do braço 2, θ_2 , mede-se no plano vertical, sendo positivo o sentido anti horário visto de frente, quando o braço 2 está suspenso, ou seja, na posição de equilíbrio estável $\theta_2 = 0$ rad. Assim como o torque exercido pelo motor no braço 1, τ_1 , é positivo no sentido anti horário quando visto de cima.

A análise física é feita primeiramente escolhendo um conjunto de coordenadas generalizadas e determinando as energias potencial, U , e cinética, T , do sistema. Encontra-se então a função lagrangiana definida por:

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T - U. \quad (1)$$

Com isso pode-se obter a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + b_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i. \quad (2)$$

em que $q_i = [\theta_1 \ \theta_2]^\top$ são as coordenadas generalizadas, $b_i = [b_1 \ b_2]^\top$ são os coeficientes de amortecimento viscoso e $Q_i = [\tau_1 \ \tau_2]^\top$ são as forças generalizadas ou torque. Assim os termos da equação de Euler-Lagrange são dados como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \ddot{\theta}_1 (J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 \\ &\quad + (m_2 l_2^2 + J_{2yy}) \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} \cos^2(\theta_2)) \\ &\quad + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) (m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 (J_{2zz} + m_2 l_2^2) \\ &\quad - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2), \\ -\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0, \\ -\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -\frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) (m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}) \\ &\quad + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) + g m_2 l_2 \sin(\theta_2). \end{aligned}$$

Substituindo esses termos na equação de Euler-Lagrange podemos encontrar as equações diferenciais que descrevem o movimento do pêndulo. Algumas simplificações podem ser feitas levando em consideração alguns fatores estruturais como o comprimento dos braços os quais geralmente são longos e finos podendo-se desprezar o momento de inércia ao longo do eixo. Podem ser feitas aproximações dos momentos de inércia de modo que:

$$\mathbf{J}_1 \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}.$$

O momento de inércia total do braço 1 em relação ao eixo de rotação é $\hat{J}_1 = J_1 + m_1 l_1^2$. O momento de inércia total do braço 2 em relação ao ponto de rotação é $\hat{J}_2 = J_2 + m_2 l_2^2$. Então o momento de inércia total sobre o motor quando o pêndulo está no ponto de equilíbrio, ou seja, verticalmente para baixo, é $\hat{J}_0 = J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2$. Logo, ao substituir essas definições nos termos da equação de Euler-Lagrange obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \left(\ddot{\theta}_1 (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \right. \\ \left. + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \right. \\ \left. - m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \right. \\ \left. + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) + b_1 \dot{\theta}_1 \right) \\ \left(\ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \right. \\ \left. + \ddot{\theta}_2 \hat{J}_2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) \right. \\ \left. + b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Neste trabalho foram utilizadas técnicas de controle linear, assim foi necessário obter um modelo dinâmico linearizado. Além disso, o sistema de controle do PIR foi implementado em um microcontrolador, logo também foi necessário converter o modelo dinâmico (3) para o tempo discreto.

3.1 Linearização

Um método comum de linearização é a linearização jacobiana. A linearização Jacobiana utiliza a expansão em Séries de Taylor a fim de encontrar um sistema linear que aproxime o sistema não-linear próximo ao ponto de equilíbrio, de forma que seja possível analisar as características deste ponto (Boyce e DiPrima, 2004).

Assim, pode-se fazer uma linearização de (3) em torno do ponto de operação do sistema. No caso do sistema de interesse, a estabilização ocorre em torno da posição vertical para cima e conforme mencionado anteriormente, apenas pequenos desvios no ângulo são tolerados pelo sistema.

O modelo linear levou em consideração algumas outras aproximações da dinâmica do modelo: os coeficientes de amortecimento viscoso, b_1 e b_2 , são iguais a 0, foi considerado apenas o torque τ_1 que age sobre o braço 1, então $\tau_2 = 0$.

Escolheu-se então o ponto de equilíbrio como

$$\theta_{1e} = 0, \quad \theta_{2e} = 0, \quad \dot{\theta}_{1e} = 0, \quad \dot{\theta}_{2e} = 0, \quad (4)$$

e realizou-se a linearização jacobiana, o seguinte sistema linearizado é encontrado

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & 0 & 0 \\ 0 & A_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{bmatrix} [\tau_1], \quad (5)$$

em que

$$\begin{aligned} A_{32} &= \frac{g m_2^2 l_2^2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}, & A_{42} &= \frac{g m_2 l_2 \hat{J}_0}{(m_2^2 L_1^2 l_2^2 - \hat{J}_0 \hat{J}_2)}, \\ B_{31} &= \frac{\hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}, & B_{41} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}. \end{aligned}$$

3.2 Discretização

Uma vez que o sistema de controle foi implementado em um microcontrolador, houve a necessidade de trabalhar com o modelo discreto do sistema, de modo que um controlador de tempo discreto pôde ser projetado.

Sendo assim, o modelo linearizado (5) foi ainda discretizado utilizando o método de Euler. Para modelos em espaço de estados a base dos métodos é obter um modelo que, idealmente, se comporte de forma semelhante ao modelo de espaço de estados contínuo original, que aqui é assumido como linear da forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t), \end{aligned} \quad (6)$$

em que $u(t)$ é o sinal de controle e $x(t)$ são as variáveis de estado.

Para um determinado tempo de amostragem T_s . O método de discretização de Euler (Aguirre, 2023) é dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (I + A_c T_s) x(k) + B_c T_s u(k) \\ y(k) &= C x(k) + D u(k). \end{aligned} \quad (7)$$

4. PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE

Seja o sistema linear de tempo discreto abaixo.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A x(k) + B u(k) \\ y(k) &= C x(k) + D u(k). \end{aligned} \quad (8)$$

Deseja-se projetar um controlador por realimentação de estado clássico

$$u(k) = K x(k). \quad (9)$$

Substituindo (9) em (8), o sistema em malha fechada é dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_f x(k), \\ y(k) &= C_f x(k), \end{aligned} \quad (10)$$

em que $A_f = (A + BK)$ e $C_f = (C + DK)$.

A origem do sistema é estável se existir uma função de Lyapunov $V(x(k)) > 0$ e $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$. Assim, considerando-se uma função de Lyapunov quadrática

$$V(x) = x^T P x; \quad \text{com } P = P^T > 0 \quad (11)$$

Uma condição para estabilização do sistema de tempo discreto (8) através da lei de controle (9) bem conhecida (Boyd, 1995) é apresentada a seguir:

Lema 1. O sistema de tempo discreto (8) é estabilizado através da lei de controle (9) se existirem matrizes $Q = Q^T > 0$ e alguma matriz Z , tal que a seguinte LMI seja factível.

$$\begin{bmatrix} -Q & Q A^T + Z^T B^T \\ A Q + B Z & -Q \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

Os ganhos do controlador podem ser encontrados por

$$K = Z Q^{-1}. \quad (13)$$

4.1 Sinal de controle aplicado

O sinal de controle do modelo (5) é o torque aplicado ao braço 1, i.e. $u(t) = \tau_1(t)$. No entanto, o motor de passo é controlado através de sua velocidade angular. Logo, para

que o torque pudesse ser aplicado no sistema algumas conversões e aproximações devem ser consideradas.

O torque gerado pelo motor e transferido ao pêndulo é dado por (Resnick et al., 2016):

$$\tau(t) = J \alpha(t), \quad (14)$$

em que J é o momento de inércia calculado levando em consideração os comprimento e massa do braço e comprimento e massa do pêndulo, e $\alpha(t)$ é a aceleração angular.

Note que a expressão está no domínio do tempo contínuo e precisamos implementar em um sistema digital. Assim, a aceleração angular pode ser discretizada também pelo método de Euler, tal que:

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \frac{\omega(k) - \omega(k-1)}{T_s} \\ \omega(k) &= T_s \alpha(k) + \omega(k-1). \end{aligned} \quad (15)$$

Assim, substituindo (14) em (15), encontra-se a velocidade angular que deve ser enviada como sinal de controle para o motor de passo.

$$\omega(k) = \frac{T_s \tau}{J} + \omega(k-1) = \frac{T_s K x}{J} + \omega(k-1). \quad (16)$$

5. RESULTADOS

Nesta sessão serão apresentados os resultados encontrados pela abordagem do projeto de controle descrito na Seção 4. O *software* MATLAB, em conjunto com o *parser* Yalmip e o *solver* Mosek foram utilizados para o cálculo dos controladores.

Com intuito de avaliar o comportamento do sistema, foram encontrados valores de ganhos para taxas de amostragens diferentes, i.e. $T_s = 20$ ms e $T_s = 40$ ms. Além disso também foi avaliada a resposta do sistema para valores diferentes de micro passos do motor de passo.

Os parâmetros do PIR construído são:

- $m_1 = 0,033$ Kg - massa do braço 1;
- $L_1 = 0,084$ m - comprimento do braço 1;
- $l_1 = \frac{1}{2} L_1$ m - distância até o centro de massa do braço 1;
- $m_2 = 0,065$ Kg - massa do braço 2;
- $L_2 = 0,166$ m - comprimento do braço 2;
- $l_2 = \frac{1}{2} L_2$ m - distância até o centro de massa do braço 2.

A partir disso, as matrizes do modelo linear de tempo contínuo (5) é dado por:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 57,6902 & 0 & 0 \\ 0 & 75,6763 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2513 \\ 1090 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

5.1 Análise de Estabilidade para $T_s = 20$ ms

Conforme descrito na Seção 3.2, após a discretização do modelo linearizado através do método de Euler e considerando a taxa de amostragem $T_s = 20$ ms, as matrizes do modelo de tempo discreto (7) obtidas foram:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,02 \\ 0 & 1,1538 & 1 & 0 \\ 0 & 1,5135 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50,2629 \\ 21,8008 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Os ganhos do controlador por realimentação de estado obtidos utilizando as Eqs. (12) e (13) é dado por:

$$K_{20} = [0,0043 \quad -0,4753 \quad 0,0065 \quad -0,0663.] \quad (18)$$

A Figura 3 mostra a variação do ângulo do pêndulo sob a influência de um distúrbio aplicado ao braço 2. Além disso, para implementação no microcontrolador foi utilizado 4 e 16 micro passos para acionamento do motor de passo. Note que ambas as respostas possuem um transitório similar. No entanto, quando esta alcança o estado estacionário, a variação fica em torno de $\pm 0,5^\circ$ quando é utilizado 16 micro passos, e $\pm 1^\circ$ quando é utilizado 4 micro passos. Assim, o motor de passo configurado para 16 micro passos resultou em um sinal menos oscilatório.

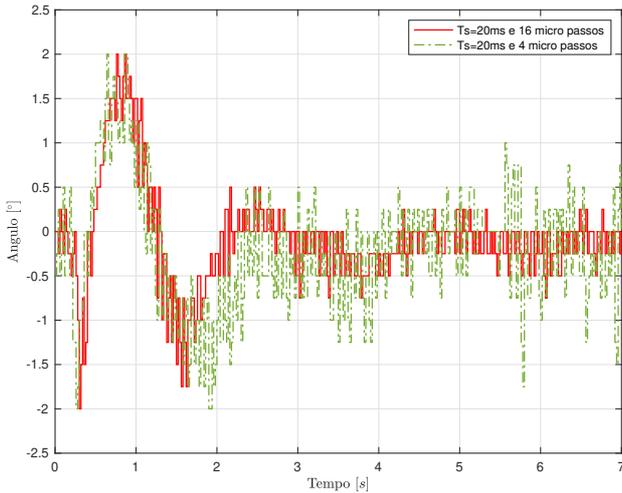


Figura 3. Resposta do ângulo do pêndulo ao distúrbio com taxa de amostragem $T_s = 20$ ms.

A Figura 4 apresenta o sinal de controle. Note que da mesma maneira, a amplitude é reduzida com 16 micro passos, isso significa que o efeito da oscilação em torno do ponto de operação é reduzido se a resolução do motor de passo for aumentada.

O controlador obteve bons resultados na estabilização do pêndulo na posição de equilíbrio vertical e conseguiu responder de forma rápida a distúrbios quando foi utilizada a taxa de amostragem $T_s = 20$ ms.

5.2 Análise de Estabilidade para $T_s = 40$ ms

Considerando agora a taxa de amostragem $T_s = 40$ ms. Utilizando os mesmo parâmetros do sistema, como na seção anterior. As matrizes do modelo de tempo discreto (7) obtidas foram:

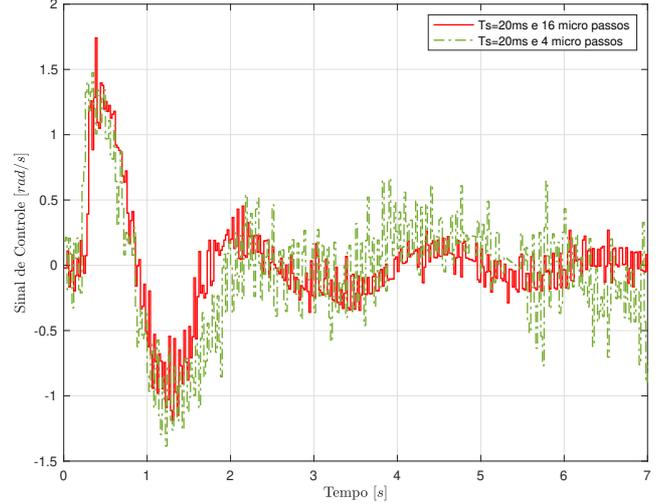


Figura 4. Velocidade angular aplicada ao motor de passo para $T_s = 20$ ms.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,04 \\ 0 & 2,3076 & 1 & 0 \\ 0 & 3,0271 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100,5257 \\ 43,6015 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Os ganhos do controlador por realimentação de estado obtidos utilizando as Eqs. (12) e (13) é dado por:

$$K_{40} = [0,0021 \quad -0,2799 \quad 0,0033 \quad -0,0370.] \quad (19)$$

A Figura 5 apresenta a variação do ângulo do pêndulo considerando $T_s = 40$ ms. Note que da mesma maneira que a seção anterior, o transitório considerando 4 e 16 micro passos é similar. Contudo, o estado estacionário apresentou maior oscilação, chegando quase a 2° de amplitude máxima. Além disso, o mesmo comportamento pode ser visto, i.e., quando uma taxa maior de atualização do motor de passo é utilizada, 16 micro passos, o sistema apresentou menor oscilação em torno do ponto de equilíbrio vertical. O sinal de controle mostrado na Figura 6 também apresenta esse comportamento e sofre redução da amplitude quando o motor está atuando com 16 micro passos.

O controlador obtido considerando $T_s = 40$ ms também foi capaz de estabilizar o pêndulo no equilíbrio vertical superior e responder de forma rápida a distúrbios. Porém ao comparar os resultados pode-se perceber que a resposta do sistema utilizando taxa de amostragem maior tende a ter maior oscilação.

O sistema em questão tem dinâmica muito rápida para que o motor possa atuar em respostas a variações mínimas dos estados, dessa forma permitindo que o pêndulo permaneça equilibrado. Aumentar a taxa de amostragem aumenta o intervalo entre os cálculos de controle, tornando o controlador mais lento e, consequentemente, deixa a resposta do atuador mais oscilatória. Isso não significa que reduzir a taxa de amostragem a valores extremamente baixos sempre irá melhorar a performance do controlador. Diminuir a taxa de amostragem torna o sistema mais suscetível a ruídos da medição.

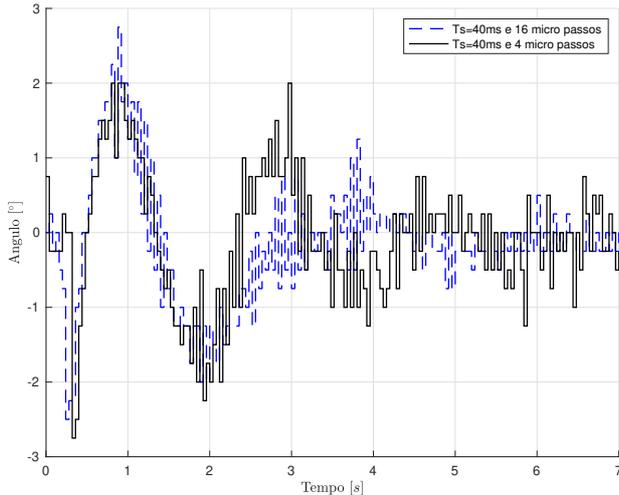


Figura 5. Resposta do ângulo do pêndulo ao distúrbio com taxa de amostragem $T_s = 40$ ms.

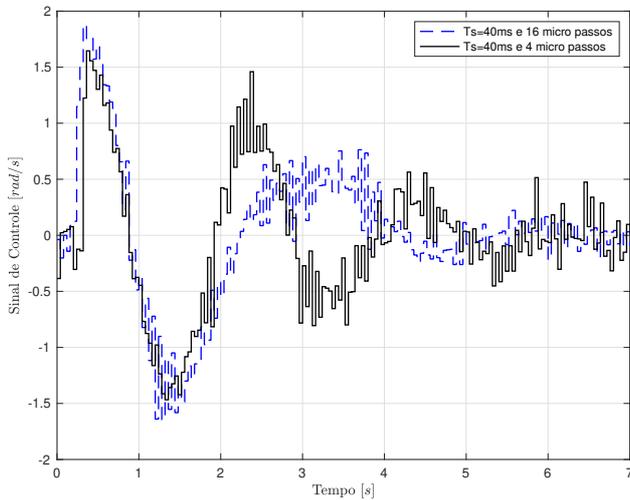


Figura 6. Velocidade angular aplicada ao motor de passo para $T_s = 40$ ms.

6. CONCLUSÃO

Neste artigo a planta de uma pêndulo invertido rotacional foi projetada e construída. Sistemas de controle foram implementados utilizando um microcontrolador Arduino. As estratégias utilizadas para o projeto dos controladores envolveram a obtenção e linearização do modelo em torno de um ponto de operação e a aplicação da teoria de estabilidade de Lyapunov. Uma análise considerando diferentes taxas de amostragens foi realizada sobre os resultados. Os controladores encontrados conseguiram lidar com perturbações externas mesmo agindo sobre a dinâmica não-linear e sub-atuada do sistema, garantindo o equilíbrio do mesmo na posição vertical para cima. O trabalho também voltou-se a explorar aspectos práticos da implementação de um controlador digital como o processo de discretização e a taxa de amostragem escolhida. Trabalhos futuros incluem a alteração do atuador para um motor de corrente contínua, projeto de controladores para se realizar a subida do pêndulo da posição vertical para baixo até a posição

vertical para cima, além do rastreamento de um ângulo de referência para o braço 1.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Processo 407885/2023-4.

REFERÊNCIAS

- Aguilar-Ibañez, C., Suárez-Castañón, M.S., e Gutiérrez-Frias, O.O. (2010). The direct Lyapunov method for the stabilisation of the Furuta pendulum. *International Journal of Control*, 83(11), 2285–2293. doi:10.1080/00207179.2010.520029.
- Aguirre, L. (2023). *Controle de Sistemas Amostrados*. 2ª ed.
- Boyce, W. e DiPrima, R. (2004). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley New York, 8 ed.
- Boyd, S. (1995). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, vol. 37. SIAM Review.
- Cazzolato, B.S. e Prime, Z. (2011). On the dynamics of the furuta pendulum. *Journal of Control Science and Engineering*, 2011, 1–8. doi:10.1155/2011/528341.
- Chaturvedi, N., McClamroch, N., e Bernstein, D. (2009). Asymptotic smooth stabilization of the inverted 3-d pendulum. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(6), 1204–1215. doi:10.1109/tac.2009.2019792.
- Furuta, K., Yamakita, M., e Kobayashi, S. (1991). Swing up control of inverted pendulum. Em *Proceedings IECON '91: 1991 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, 2193–2198 vol.3. doi:10.1109/IECON.1991.239008.
- La Hera, P.X., Freidovich, L.B., Shiriaev, A.S., e Mettin, U. (2009). New approach for swinging up the Furuta pendulum: Theory and experiments. *Mechatronics*, 19(8), 1240–1250. doi:10.1016/j.mechatronics.2009.07.005.
- Moreno-Valenzuela, J., Aguilar-Avelar, C., Puga-Guzman, S., e Santibanez, V. (2016). Adaptive neural network control for the trajectory tracking of the Furuta pendulum. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 46, 1–14. doi:10.1109/TCYB.2015.2509863.
- Prado, A., Herrera, M., e Menéndez, O. (2020). Intelligent swing-up and robust stabilization via tube-based nonlinear model predictive control for a rotational inverted-pendulum system. *Revista Politecnica*, 45. doi:10.33333/rp.vol45n1.05.
- Resnick, R., Halliday, D., e Walker, J. (2016). *Fundamentos de Física - Mecânica*, vol. 1. LTC São Paulo.